ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $4^{η}$ ΔΕΚΑΔΑ

31.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7$

α) Δείξτε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) Να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $P(x)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2 + (x-1)^3 - x^3 + 7 = \\ &= x^2 + 2x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 7 = \\ &= -2x^2 + 5x + 7 \end{aligned}$$

β)

$P(x) = 0$ άρα $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ με $\Delta = 81$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-5+9}{-4} = -1 \ , \quad x_2 = \frac{-5-9}{-4} = \frac{7}{2}$$

γ)

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης προκύπτει για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{-5}{-4} = \dfrac{5}{4}$

και είναι ίση με $y = \dfrac{-\Delta}{4\alpha} = \dfrac{-81}{-8} = \dfrac{81}{8}$

32.

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

α) $3(x+1) + 2x > x + 2 - (4x-4)$ και $-2(x-3) + 5x \geq 3(x-1) + x - 1$.

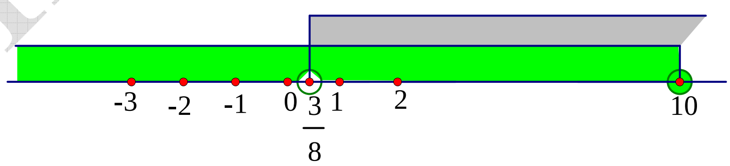
β) $2(3x-4) - 8 > 5x + 1 - 3(6x-7)$ και $\dfrac{2x-3}{6} - \dfrac{x+1}{2} < x - \dfrac{3x-1}{4}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} 3(x+1) + 2x > x + 2 - (4x-4) \quad &\text{και} \quad -2(x-3) + 5x \geq 3(x-1) + x - 1. \\ 3x + 3 + 2x > x + 2 - 4x + 4 \quad &\text{και} \quad -2x + 6 + 5x \geq 3x - 3 + x - 1 \\ 8x > 3 \quad &\text{και} \quad -x \geq -10 \\ x > \frac{3}{8} \quad &\text{και} \quad x \leq 10 \end{aligned}$$

Παράσταση λύσεων στην ευθεία των αριθμών



Από τον παραπάνω άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι

$$\frac{3}{8} < x \leq 10$$

β)

$2(3x-4) - 8 > 5x + 1 - 3(6x-7)$ και $\dfrac{2x-3}{6} - \dfrac{x+1}{2} < x - \dfrac{3x-1}{4}$

$$6x - 8 - 8 > 5x + 1 - 18x + 21 \quad \text{και} \quad 12 \cdot \frac{2x-3}{6} - 12 \cdot \frac{x+1}{2} < 12x - 12 \cdot \frac{3x-1}{4}$$

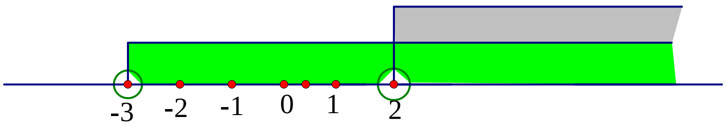
$$19x > 38 \quad \text{και} \quad 2(2x-3) - 6(x+1) < 12x - 3(3x-1)$$

$$x > 2 \quad \text{και} \quad 4x - 6 - 6x - 6 < 12x - 9x + 3$$

$$x > 2 \quad \text{και} \quad -5x < 15$$

$$x > 2 \quad \text{και} \quad x > -3$$

Παράσταση λύσεων στην ευθεία των αριθμών



Από τον παραπάνω άξονα βλέπουμε ότι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι $x > 2$

33.

Να λυθούν οι εξισώσεις

α) $\dfrac{4x+1}{x-2} = -\dfrac{9}{2-x}$

β) $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3} = \dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{2-3x}{x-3}$

γ) $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x+8}{x^2+2x}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\dfrac{4x+1}{x-2} = -\dfrac{9}{2-x}$ άρα $\dfrac{4x+1}{x-2} = \dfrac{9}{x-2}$

ΕΚΠ παρονομαστών $= x - 2 \neq 0$ άρα $x \neq 2$

$$(x-2)\frac{4x+1}{x-2} = (x-2)\frac{9}{x-2}$$

$$4x + 1 = 9$$

$$4x = 8 \quad \text{επομένως} \quad x = 2$$

τιμή που απορρίπτεται λογω των περιορισμών

β)

$$\frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3} = \frac{x-2}{x-1} - \frac{2-3x}{x-3}$$

$$\frac{3x^2-5x+2}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-1} - \frac{2-3x}{x-3}$$

ΕΚΠ παρονομαστών $= (x-3)(x-1) \neq 0$ άρα $x \neq 3$ και $x \neq 1$

$$(x-3)(x-1)\frac{3x^2-5x+2}{(x-1)(x-3)} = (x-3)(x-1)\frac{x-2}{x-1} - (x-3)(x-1)\frac{2-3x}{x-3}$$

$$3x^2 - 5x + 2 = (x-3)(x-2) - (x-1)(2-3x)$$

$$3x^2 - 5x + 2 = x^2 - 2x - 3x + 6 + 3x^2 - 2x + 2 - 3x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{με} \quad \Delta = 1 \quad \text{και ρίζες} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

η $x = 3$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

γ)

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x} \quad \text{άρα} \quad \frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

ΕΚΠ παρονομαστών = $x(x+2) \neq 0$ άρα $x \neq 0$ και $x \neq -2$

$$x(x+2)\frac{x}{x+2} + x(x+2)\frac{4}{x} = x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)}$$

$x^2 + 4(x+2) = x + 8$

$x^2 + 3x = 0$

$x(x+3) = 0$ οπότε $x = 0$ ή $x = -3$

η $x = 0$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

34.

i) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις

$A = 4\alpha^2(\beta^2 - 1) + 4\beta^2(1 - \beta^2)$ $\quad$ $B = \alpha^2 + \alpha\beta + 5\alpha + 5\beta$

$\Gamma = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + \alpha\beta + \beta$ $\quad$ $\Delta = \alpha^2 - \beta^2 - 10\alpha + 25$

ii) Να βρείτε τις σχέσεις μεταξύ των α και β έτσι ώστε $\Delta = 0$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$A = 4\alpha^2(\beta^2 - 1) + 4\beta^2(1 - \beta^2) = 4\alpha^2(\beta^2 - 1) - 4\beta^2(\beta^2 - 1)$

$= 4(\beta^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2) =$

$= 4(\beta - 1)(\beta + 1)(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

$B = \alpha^2 + \alpha\beta + 5\alpha + 5\beta = \alpha(\alpha + \beta) + 5(\alpha + \beta) =$

$= (\alpha + \beta)(\alpha + 5)$

$\Gamma = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + \alpha\beta + \beta = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \beta(\alpha + 1) =$

$= \alpha(\alpha + 1)^2 + \beta(\alpha + 1) =$

$= (\alpha + 1)[\alpha(\alpha + 1) + \beta] =$

$= (\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha + \beta)$

$\Delta = \alpha^2 - \beta^2 - 10\alpha + 25 = (\alpha - 5)^2 - \beta^2 = (\alpha - 5 - \beta)(\alpha - 5 + \beta)$

ii)

$\Delta = 0$ άρα $(\alpha - 5 - \beta)(\alpha - 5 + \beta) = 0$

$\alpha - 5 - \beta = 0$ ή $\alpha - 5 + \beta = 0$

$\alpha - \beta = 5$ ή $\alpha + \beta = 5$

35.

Έστω το πολυώνυμο $\varphi(x) = 2x^2 – 5x + 3$

α) Να βρείτε τα πολυώνυμα $\varphi(x – 2)$ και $\varphi(x + 1)$

β) Να κάνετε την διαίρεση $[\varphi(x) + \varphi(x–2) – \varphi(x + 1)] : (x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης

Προτεινόμενη λύση

α)

$\varphi(x – 2) = 2(x – 2)^2 – 5(x – 2) + 3 =$
$= 2(x^2 – 4x + 4) – 5x + 10 + 3 =$
$= 2x^2 – 8x + 8 – 5x + 10 + 3 =$
$= 2x^2 – 13x + 21$

$\varphi(x + 1) = 2(x + 1)^2 – 5(x + 1) + 3 =$
$= 2(x^2 + 2x + 1) – 5x – 5 + 3 =$
$= 2x^2 + 4x + 2 – 5x – 5 + 3 =$
$= 2x^2 – x$

Οπότε $\varphi(x) + \varphi(x–2) – \varphi(x + 1) = 2x^2 – 5x + 3 + 2x^2 – 13x + 21 – (2x^2 – x)$
$= 2x^2 – 5x + 3 + 2x^2 – 13x + 21 – 2x^2 + x =$
$= 2x^2 – 17x + 24$

β)

$2x^2 – 17x + 24$ $+\ –2x^2 –2x$	$x + 1$
$–19x + 24$ $+\ 19x + 19$	$2x–19$
43	

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $2x^2 – 17x + 24 = (x + 1)(2x–19) + 43$

36.

Έστω $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 \le x \le 20 \}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A = \{ x \in \Omega$ και x άρτιος αριθμός $\}$ και
$B = \{x \in \Omega$ και x πολλαπλάσιο του $5\}$

α) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα Ω, A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

β) Επιλέγουμε ένα στοιχείο του Ω στην τύχη. Να βρεθεί η πιθανότητα :

i. Να πραγματοποιηθεί το A.
ii. Να πραγματοποιηθεί το B.
iii. Να πραγματοποιηθεί το $A \cap B$
iv. Να μην πραγματοποιηθεί το $A \cup B$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\Omega = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 \}$
$A = \{ 0, 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20\}$
$B = \{ 0 , 5 , 10 , 15 , 20 \}$

β)

i. $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{11}{21}$

ii. $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{5}{21}$

iii. $A \cap B = \{\ 0\ ,\ 10\ ,\ 20\}$ με $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{21}$

iv. $A \cup B = \{\ 0,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ 12\ ,\ 14\ ,\ 16\ ,\ 18\ ,\ 20\ ,\ 5\ ,\ 15\ \}$

Επομένως $(A \cup B)' = \{1\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ 13\ ,\ 17,\ 19\}$

Οπότε $P(A \cup B)' = \dfrac{N(A \cup B)'}{N(\Omega)} = \dfrac{8}{21}$

37.

Να βρείτε τις τιμές των κ , λ και μ έτσι ώστε

α) Τα μονώνυμα $3\alpha^{\lambda+1} \cdot \gamma$ και $8\gamma^{\kappa-2} \cdot \alpha^3$ να είναι όμοια

β) Τα μονώνυμα $(\lambda - 2) \cdot x \cdot y^{\mu} \cdot \omega^5$ και $(7 - 2\lambda)\, x \cdot y^2 \cdot \omega^{\kappa+1}$ να είναι ίσα

γ) Τα μονώνυμα $(\mu + 5)\, \alpha^{\kappa} \cdot \beta^{\lambda+3}$ και $2\alpha^3 \cdot \beta^5$ να είναι αντίθετα

Προτεινόμενη λύση

α)

Πρέπει $\lambda + 1 = 3$ και $\kappa - 2 = 1$ άρα $\lambda = 2$ και $\kappa = 3$

β)

Πρέπει $\lambda - 2 = 7 - 2\lambda$ και $\mu = 2$ και $\kappa + 1 = 5$ άρα
$\lambda = 3$ και $\mu = 2$ και $\kappa = 4$

γ)

Πρέπει $\mu + 5 = -2$ και $\kappa = 3$ και $\lambda + 3 = 5$ άρα
$\mu = -7$ και $\kappa = 3$ και $\lambda = 2$

38.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5x^2 - 1$

α) Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x + 1)$ και $P(x) + 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x + 1) = P(x) + 1$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned}P(x + 1) &= (x + 1)^3 - 5(x + 1)^2 - 1 = \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5(\ x^2 + 2x + 1) - 1 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 5x^2 - 10x - 5 - 1 = \\ &= x^3 - 2x^2 - 7x - 5\end{aligned}$$

$P(x) + 1 = x^3 - 5x^2 - 1 + 1 = x^3 - 5x^2$

β)

$P(x + 1) = P(x) + 1$ άρα $x^3 - 2x^2 - 7x - 5 = x^3 - 5x^2$

$3x^2 - 7x - 5 = 0$ με $\Delta = 109$ και ρίζες

$x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{109}}{6}$ και $x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{109}}{6}$

39.

Να γίνουν οι πράξεις

α) $\dfrac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta-2\alpha}\cdot\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{\alpha^3}$ **β)** $\dfrac{1-9x^2}{8x}:\dfrac{x^2-6x+1}{12x^2-4x}$

γ) $\dfrac{y}{x^2-xy}+\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2y}{x^2-y^2}$ **δ)** $\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right):\left(\dfrac{1}{x^3}-1\right)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta-2\alpha}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^2}{\alpha^3}=\frac{(2\alpha-\beta)\alpha(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-2\alpha)\alpha^3}=$$

$$=\frac{-\cancel{(\beta-2\alpha)}\,\cancel{\alpha}\,(\alpha-\beta)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\alpha-\beta)}\,\cancel{(\beta-2\alpha)}\,\alpha^{\cancel{3}\,2}}=\frac{-(\alpha-\beta)}{\alpha^2}$$

β)

$$\frac{1-9x^2}{8x}:\frac{3x^2-5x-2}{12x^2-4x}=\frac{(1-3x)(1+3x)}{8x}:\frac{(3x+1)(x-2)*}{4x(3x-1)}=$$

$$=\frac{(1-3x)(1+3x)}{8x}\cdot\frac{4x(3x-1)}{(3x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{(1-3x)(1+3x)4x(3x-1)}{8x(3x+1)(x-2)}=$$

$$=\frac{(1-3x)(3x-1)}{2(x-2)}=\frac{-(1-3x)(1-3x)}{2(x-2)}=\frac{-(1-3x)^2}{2(x-2)}$$

* Το $3x^2-5x-2$ έχει $\Delta=49$ και ρίζες $x_1=-\dfrac{1}{3}$ και $x_2=2$

Επομένως γίνεται γινόμενο με βάση τον τύπο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

ως εξής $3x^2-5x-2=3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-2)=(3x+1)(x-2)$

γ)

$$\frac{y}{x^2-xy}+\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{y}{x(x-y)}+\frac{1}{x+y}-\frac{2y}{(x-y)(x+y)}$$

ΕΚΠ παρονομαστών $x\,(x-y)(x+y)$ επομένως η παράσταση γίνεται

$$\frac{y(x+y)}{x(x-y)(x+y)}+\frac{x(x-y)}{x(x-y)(x+y)}-\frac{2xy}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{y(x+y)+x(x-y)-2xy}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{yx+y^2+x^2-xy-2xy}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{y^2+x^2-2xy}{x(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{(x-y)^2}{x(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{x(x+y)}$$

δ)

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x^3}-1\right)=\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{1}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right):\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2+x+1}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{1-x^3}\right)=$$

$$=\frac{(x^2+x+1)x^3}{x^2(1-x^3)}=$$

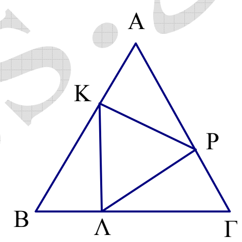
$$=\frac{(x^2+x+1)x^3}{x^2(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{x}{1-x}$$

40.

Στο διπλανό ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΚ = ΒΛ = ΓΡ.
Να αποδείξετε ότι

α) Το τρίγωνο ΚΛΡ είναι ισόπλευρο

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ είναι όμοια.



Προτεινόμενη λύση

α)

Έχουμε ΑΚ = ΒΛ = ΓΡ

ΑΡ = ΒΚ = ΓΛ ως διαφορές ίσων ευθυγράμμων τμημάτων
(ΑΓ– ΡΓ , ΑΒ– ΑΚ , ΒΓ– ΒΛ)

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες ισοπλεύρου τριγώνου

Άρα , με βάση το (Π – Γ – Π), τα τρίγωνα ΑΚΡ , ΒΚΛ και ΓΛΡ είναι ίσα.
Οπότε ΚΡ = ΚΛ = ΛΡ, επομένως το τρίγωνο ΚΛΡ είναι ισόπλευρο.

β)

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ είναι όμοια διότι ως ισόπλευρα έχουν τις γωνίες τους 60^o την κάθε μία, επομένως ίσες